Алгоритм ділення многочленів «куточком». Теорема Безу.

Це потрібно знати!

Многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, що тотожно не дорівнює нулю, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in R$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, де $A(x)$ – ділене, $B(x)$ – дільник, $Q(x)$ – частка.

Многочлен $x^3 - 8$ ділиться націло на многочлен $x - 2$.

Дійсно, $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$. При діленні многочленів застосовується алгоритм ділення у стовпчик, аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел.

$$
\begin{array}{l|l}
\_6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
6x^4 - 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 - x \\ \cline{1-1}
\quad \_ \; -2x^3 + x^2 - x & \\
\qquad -2x^3 + x^2 - x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$$

Очевидно, що якщо $A(x)$ ділиться націло на $B(x)$ і $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$.

Якщо один многочлен не ділиться націло на інший, то розглядається ділення з остачею. Для будь-якого многочлена $A(x)$ і многочлена $B(x)$, який не дорівнює нулю, існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$, $Q(x)$ – неповна частка, $R(x)$ – остача.

$$
\begin{array}{l|l}
\_2x^5 + 5x^3 + 6x - 7 & x^3 + x \\ \cline{2-2}
2x^5 + 2x^3 & 2x^2 + 3 \text{ – неповна частка} \\ \cline{1-1}
\qquad \_\,3x^3 + 6x - 7 & \\
\qquad\,3x^3 + 3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 3x - 7 \text{ – остача} &
\end{array}
$$

Це потрібно вміти!

Виділить цілу частину з раціонального дробу: $\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

$$
\begin{array}{l|l}
\_2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
2x^4 - 2x^2 & 2x^2 - 3x + 6 \\ \cline{1-1}
\quad \_ \quad 3x^3 + 6x^2 + 1 & \\
\qquad -3x^3 + 3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \_6x^2 - 3x + 1 & \\
\qquad\qquad6x^2 - 6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -3x + 7 &
\end{array}
$$

$\frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1} = 2x^2 - 3x + 6 + \frac{7 - 3x}{x^2 - 1}$.

Це потрібно знати!

Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Зрозуміло, що корінь многочлена $A(x)$ – це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.

Теорема. Для того, щоб число α було коренем многочлена $A(x)$, необхідно й достатньо, щоб многочлен $A(x)$ ділився націло на двочлен $x - \alpha$.

Це потрібно вміти!

1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$ $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$; $B(x) = x + 2$.

За теоремою Безу остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $(x - \alpha)$ дорівнює $A(\alpha)$, тому: $A(2) = 2 \cdot (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^3 + 2 - 1 = 65$, отже остача 65.

$$
\begin{array}{rl|l}
- & 2x^4 - 4x^3 - x - 1 & x + 2 \\
\cline{3-3}
 & 2x^4 + 4x^3 & 2x^3 - 8x^2 + 16x - 33 \\
\cline{1-2}
- & -8x^3 - x - 1 & \\
 & -8x^3 - 16x^2 & \\
\cline{1-2}
- & 16x^2 - x - 1 & \\
 & 16x^2 + 32x & \\
\cline{1-2}
- & -33x - 1 & \\
 & -33x - 66 & \\
\cline{1-2}
 & 65 & \text{– остача}
\end{array}
$$

2. Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

$A(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42$; $B(x) = x^2 + x - 2$.

Розкладемо многочлен $B(x) = x^2 + x - 2$ на множники: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$.

$$A(-2) = (-2)^4 - 9 \cdot (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 41 \cdot (-2) - 42 = 16 + 72 + 36 - 82 - 42 = 0.$$

$$A(1) = 1 - 9 + 9 + 41 - 42 = 0.$$

Отже $A(x)$ ділиться націло на $B(x)$, так як $A(x)$ ділиться на $(x + 2)$ і $A(x)$ ділиться на $(x - 1)$.

3. При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $(x + 2)$?

$$A(-2) = -8 + 12 + 2b + 6 = 10 + 2b;\ \ 10 + 2b = 0;\ \ 2b = -10;\ \ b = -5.$$

4. При яких значеннях параметрів a, b і c многочлен $x^3 + ax^2 + +bx + c$ ділиться націло на двочлен $(x - 1)$ і $(x + 2)$, а при діленні на двочлен $(x + 1)$ дає в остачі 10?

З теоремою Безу маємо: $\begin{cases} 1 + a + b + c = 0, \\ -8 + 4a - 2b + c = 0, \\ -1 + a - b + c = 10; \end{cases}$

$$\begin{cases} a + b + c = -1, \\ 4a - 2b + c = 8, \\ a - b + c = 11; \end{cases} \qquad - \begin{cases} a + b + c = -1, \\ 4a - 2b + c = 8; \end{cases} \qquad + \begin{cases} a + b + c = -1, \\ a - b + c = 11; \end{cases}$$

$-3a + 3b = -9;$ $\qquad$ $2a + 2c = 10;$

$-a + b = -3;$ $\qquad$ $a + c = 5;$

$b = -3 + a;$ $\qquad$ $c = 5 - a;$

$a + b + c = -1;$

$a - 3 + a + 5 - a = -1;$

$a = -3;$

$b = -3 - 3 = -6;$

$c = 5 + 3 = 8.$